UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI PADOVA

DIPARTIMENTO DI SCIENZE ECONOMICHE ED AZIENDALI "M.FANNO"

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA

CORSO DI LAUREA IN ECONOMIA

PROVA FINALE

"FUNZIONI POSITIVAMENTE OMOGENEE E APPLICAZIONI ALLA MICROECONOMIA"

RELATORE:

CH.MO PROF. LUCA GROSSET

LAUREANDO: NICOLA BOSCOLO MANERA

MATRICOLA N. 1091867

ANNO ACCADEMICO 2016 – 2017

Indice

Funzioni positivamente omogenee e applicazioni alla Microeconomia

NICOLA BOSCOLO MANERA*

Università degli Studi di Padova
Scuola di Economia e Scienze Politiche
Dipartimento di Matematica

Sommario

Questa prova finale si occupa dello studio delle dinamiche di domanda e offerta individuali in modelli microeconomici caratterizzati da funzioni positivamente omogenee. Le funzioni positivamente omogenee si qualificano per come il loro grado di omogeneità ponga in stretta relazione il prodotto di tutte le variabili indipendenti per una stessa costante con il valore della funzione. In questa trattazione accosteremo le proprietà matematiche delle funzioni positivamente omogenee con la costruzione dei modelli di domanda e offerta, evidenziando in che modo si possano valorizzare le sinergie nell'interpretare e prevedere il comportamento dei due più tipici agenti economici: il consumatore e l'impresa. Infine mostreremo come tali funzioni siano distinguibili ed informative anche tramite un approccio grafico.

Incontrare forme funzionali caratterizzate da omogeneità non è affatto atipico durante un corso di Microeconomia di base. Si pensi all'utilizzo di funzioni alla Cobb-Douglas nel definire le preferenze o le possibilità tecnologiche, spesso citate in alternativa alle situazioni di beni perfetti sostituti o complementi. Non è però solamente nel caratterizzare funzioni di utilità e produzione che si affrontano funzioni positivamente omogenee, anzi, è maggiormente nell'effettuare analisi di statica comparata a scopo previsionale, con la necessità o meno di porre determinate condizioni, che ci si imbatte in esse. Si considerino ad esempio, per quanto riguarda il consumatore, le funzioni ordinarie di domanda, il sentiero di espansione del reddito e l'elasticità della domanda al reddito. Studiare modelli di domanda o offerta contenenti questo tipo di funzioni sarebbe superficiale e poco proficuo se non si esplicitano e comprendono prima le proprietà matematiche che esse possiedono. A tal fine nel primo capitolo si esporrà la definizione di funzione positivamente omogenea e le relative proprietà. Nel redigere questa prima parte ha funto da linea guida il libro "Mathematics for Economists" di SIMON e BLUME (1994), che formalizza e chiarisce le relazioni tra linguaggio matematico e comportamento degli agenti economici. Nel secondo e terzo capitolo si entrerà nel cuore del lavoro, ove si tenterà di abbinare le pregresse conoscenze microeconomiche con i risultati analitici ottenuti nel capitolo I. Si mirerà quindi ad indicare con semplicità, pur rispettando il rigore matematico necessario, come il singolo consumatore o la singola impresa agisca quando una o più delle funzioni alla base del suo comportamento sia positivamente omogenea. Pur restando sostanziale anche in questa seconda fase il supporto di SIMON e BLUME (1994), le assunzioni di base e la natura microeconomica del linguaggio e degli esempi fanno riferimento ai manuali di Microeconomia KATZ *e altri* (2011) e "Advanced Microeconomic Theory" di JEHLE e RENY (2011). Quest'ultimo, essendo dotato di maggior struttura e dettaglio sotto il profilo analitico, si è rivelato un valido ponte tra teoria matematica e descrizione microeconomica. Il quarto capitolo si propone di abbinare i concetti e le intuizioni approfondite

*Relatore: Dott. Luca Grosset

nelle sezioni precedenti ad alcune simulazioni numeriche realizzate con MATLAB.

Le funzioni positivamente omogenee hanno avuto un ruolo di rilievo negli sviluppi della teoria economica. Tanto è vero che fu relativamente alle applicazioni economiche del Teorema di Eulero che Philip Wicksteed tentò di provare nel 1894 il Teorema di "Product Exhaustion". Si rivelò però Alfred William Flux, nello stesso anno, il primo a fornire una prova elegante del collegamento tra l'espressione correlata alla "Product Exhaustion" e lo studio di Eulero (BLAUG, 1985, pag. 439-443). In seguito, nel 1928, Charles Wiggis Cobb e Paul Haward Douglas testarono empiricamente la relazione tra quantità di output ottenuta e gli inputs capitale e lavoro, formulando una funzione di produzione linearmente omogenea, che con le sue peculiarità, rimane ancora oggi la più utilizzata nell'analisi delle dinamiche produttive (VALI, 2014, pag. 318).

I. Definizione e proprietà di una funzione positivamente omogenea

Si lascia inizialmente spazio alla definizione di funzione positivamente omogenea (SIMON e BLUME, 1994, pag. 484), senza tralasciare le condizioni che una funzione necessita perchè si possa verificarne effettivamente l'omogeneità. Immediatamente dopo vengono introdotte e dimostrate le due principali proprietà matematiche che le funzioni positivamente omogenee possiedono. Il capitolo termina con alcune esemplificazioni, le quali danno modo di tradurre in termini pratici il significato di ciò che è stato conseguito tramite strumenti matematici.

Definizione 1 (Funzione positivamente omogenea)**.** Abbia $f(x_1, ... , x_n)$ dominio $D \subseteq \mathbf{R}^n$ per il quale valga la seguente relazione

$$se \;\; x \in D \;\; allora \;\; tx \in D \;\; \forall t > 0,$$

in tal caso la funzione $f(x_1, ... , x_n)$ è positivamente omogenea di grado k, con $k \in \mathbf{R}$, se

$$f(tx_1, ... , tx_n) = t^k f(x_1, ... , x_n) \;\; \forall x \in D, \; \forall t > 0.$$

Proprietà 1 (Derivata prima parziale di una funzione positivamente omogenea)**.** *Sia $f(x)$ una funzione differenziabile e positivamente omogenea di grado k, allora la sua derivata prima parziale rispetto a x_i è positivamente omogenea di grado $k-1$ (JEHLE e RENY, 2011, pag.562-563).*

Dimostrazione. Si assuma $f(x)$ positivamente omogenea di grado k

$$f(tx) = t^k f(x) \;\; \forall t > 0. \tag{1}$$

Si derivi $f(x)$ rispetto a x_i (considerando la struttura composta della funzione e dunque applicando appropriatamente la regola della catena)

$$\frac{\partial[f(tx)]}{\partial x_i} = \frac{\partial f(tx)}{\partial x_i}\frac{\partial tx_i}{\partial x_i} = \frac{\partial f(tx)}{\partial x_i}t. \tag{2}$$

Si derivi $t^k f(x)$ rispetto a x_i

$$\frac{\partial(t^k f(x))}{\partial x_i} = t^k \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}. \tag{3}$$

Essendo (1) un'identità, ciò che si è ottenuto in (2) e (3) deve eguagliarsi

$$\frac{\partial f(tx)}{\partial x_i}\; t = t^k \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}.$$

Dividiamo entrambi i lati per t

$$\frac{\partial f(tx)}{\partial x_i} = t^{k-1} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}, \qquad \square$$

valida per $i = 1, ..., n$, come si desiderava dimostrare.

Proprietà 2 (Teorema di Eulero)**.** *Sia $f(x_1, ... , x_n)$ una funzione differenziabile e positivamente omogenea di grado k, allora*

$$x_1 \frac{\partial f(x_1, ... , x_n)}{\partial x_1} + ... + xn \frac{\partial f(x_1, ... , x_n)}{\partial x_n} = kf(x_1, ... , x_n),$$

in altri termini

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} x_i = kf(x),$$

vale a dire che la somma delle n derivate parziali di $f(x_1, ... , x_n)$, moltiplicate ciascuna per la propria variabile di derivazione, uguaglia la funzione stessa moltiplicata per il corrispondente grado di omogeneità (SIMON e BLUME, 1994, pag. 491-492).

Dimostrazione. Definiamo la funzione di t

$$g(t) = f(tx_1, \ldots, tx_n),$$

si calcoli la derivata parziale rispetto a t (facendo attenzione a come si tratti di una funzione composta in due variabili e richiamando pertanto la regola della catena)

$$g'(t) = \frac{\partial f(tx_1, \ldots, tx_n)}{\partial x_1}\frac{\partial (tx_1)}{\partial t} + \ldots \\ \ldots + \frac{\partial f(tx_1, \ldots, tx_n)}{\partial x_n}\frac{\partial (tx_n)}{\partial t},$$

considerando che

$$\frac{\partial (tx_i)}{\partial t} = x_i \quad ,$$

e ponendo $t = 1$, si ottiene

$$g'(1) = x_1\frac{\partial f(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_1} + \ldots \\ \ldots + x_n\frac{\partial f(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_n}. \quad (4)$$

Per completare la dimostrazione del teorema si assuma $f(x)$ positivamente omogenea di grado k

$$f(tx) = t^k f(x) \quad \forall t > 0.$$

Osserviamo come

$$g(t) = t^k f(x),$$

deriviamo rispetto a t

$$g'(t) = kt^{k-1}f(x),$$

rispettiamo l'assunzione precedente secondo cui $t = 1$, allora

$$g'(1) = kf(x). \quad (5)$$

Sostituendo (5) in (4)

$$kf(x) = x_1\frac{\partial f(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_1} + \ldots \\ \ldots + x_n\frac{\partial f(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_n}, \quad \square$$

come promesso dal Teorema di Eulero.

ESEMPIO

Utilizziamo ora un esempio per capire il significato operativo di questi risultati.
Si consideri la seguente funzione alla Cobb-Douglas

$$f(x_1, x_2) \equiv Ax_1^\alpha x_2^\beta \;\; con \;\; A > 0, \alpha > 0, \beta > 0,$$

sostituendo le variabili x_1, x_2 con tx_1, tx_2 , ipotizzando $t > 0$, si ottiene

$$\begin{aligned} f(tx_1, tx_2) &\equiv A(tx_1)^\alpha (tx_2)^\beta \\ &\equiv t^\alpha t^\beta Ax_1^\alpha x_2^\beta \\ &\equiv t^{\alpha+\beta} f(x_1, x_2), \end{aligned}$$

permettendoci di affermare, grazie alla definizione 1, come tale funzione sia positivamente omogenea di grado $\alpha + \beta$.
Poniamo $\alpha + \beta = 1$, ovvero si abbia una funzione positivamente omogenea di grado 1, e si calcolino le derivate parziali rispetto a x_1 e x_2

$$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} = \alpha Ax_1^{\alpha-1}x_2^\beta,$$
$$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} = \beta Ax_1^\alpha x_2^{\beta-1},$$

si osserva come ambedue presentino un grado di omogenità pari a 0, rispettando la proprietà 1. Infatti

$$\frac{\partial f(tx_1, tx_2)}{\partial x_i} = \frac{t^{k-1}\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_i} \;\; con \; i = 1, 2 \; .$$

Si moltiplichi a questo punto ciascuna derivata parziale per la propria variabile di derivazione, quindi sommiamo i due termini

$$\begin{gathered} \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1}x_1 + \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2}x_2 \\ \alpha Ax_1^{\alpha-1}x_2^\beta x_1 + \beta Ax_1^\alpha x_2^{\beta-1}x_2 \\ \alpha Ax_1^\alpha x_2^\beta + \beta Ax_1^\alpha x_2^\beta \\ (\alpha + \beta)Ax_1^\alpha x_2^\beta \\ 1f(x_1, x_2) \\ kf(x_1, x_2), \end{gathered}$$

confermando la validità della proprietà 2 (Teorema di Eulero) in termini pratici.

II. Funzioni positivamente omogenee e teoria del consumatore

Per rispondere ai complessi interrogativi riguardanti i sistemi economici e le dinamiche che li contraddistinguono si fa frequentemente uso di modelli economici (KATZ *e altri*, 2011, pag. 5). Ogni modello, pur basandosi su definite teorie economiche, si qualifica come una rappresentazione più o meno complessa di tipo matematico. Per tale ragione, in questo e nel prossimo capitolo, si cercherà di comprendere come basilari modelli economici risentano della presenza di funzioni positivamente omogenee al loro interno, in una prospettiva normativa.

Assumiamo che le preferenze del consumatore rispettino gli assiomi di completezza, transitività e non sazietà. Poniamo inoltre, al fine di evitare che le curve di indifferenza abbiano forme particolari, che l'andamento del saggio marginale di sostituzione sia decrescente (KATZ *e altri*, 2011, pag. 23-28). Nello scegliere il paniere di equilibrio è richiesto al consumatore di risolvere un problema di massimizzazione vincolata (JEHLE e RENY, 2011, pag 19-24), che nel caso a due beni consiste in

$$max\ U(x_1, x_2) \ \ sotto\ il\ vincolo \ \ p_1x_1 + p_2x_2 = B\ .$$
$$con\ x \in \mathbf{R}^2_+$$

La soluzione di equilibrio si ottiene nel punto di tangenza tra vincolo di bilancio e curva d'indifferenza, vale a dire dove sussiste la medesima pendenza

$$MRS_{x_1x_2} = \frac{p_1}{p_2}.$$

Sapendo che $MRS_{x_1x_2}$ eguaglia il rapporto tra le utilità marginali

$$\frac{MU_{x_1}}{MU_{x_2}} = \frac{p_1}{p_2}.$$

La soluzione di equilibrio dipende pertanto dai parametri del vincolo di bilancio e dalla caratterizzazione delle funzioni di utilità. La combinazione ottima (x_1, x_2) è unica per determiniti valori di p_1, p_2 e B. Possono quindi essere costruite, per ciascun bene, le funzioni ordinarie di domanda rispetto ai prezzi e al reddito

$$x_1^* = x_1(p_1, p_2, B) \ \ e \ \ x_2^* = x_2(p_1, p_2, B).$$

Analizzando la struttura del vincolo di bilancio notiamo come variazioni della stessa proporzione nel livello dei prezzi e nel reddito lo lascino immutato, ovvero

$$p_1x_1 + p_2x_2 = B \quad \sim \quad tp_1x_1 + tp_2x_2 = tB,$$

potendo dividere entrambi i lati della seconda equazione $\forall t > 0$. Fissando la struttura delle preferenze si comprende come variazioni equiproporzionali nei prezzi e nel reddito non influenzino le scelte effettuate dal consumatore. Si conclude che

$$\begin{aligned} x_i^* &= x_i(tp_1, tp_2, tB) \quad \forall t > 0 \ \ con\ i = 1, 2 \\ &= t^0 x_i(p_1, p_2, B) \\ &= x_i(p_1, p_2, B), \end{aligned}$$

ovvero le funzioni di domanda sono positivamente omogenee di grado zero in tutti i prezzi e nel reddito (SIMON e BLUME, 1994, pag. 486): la quantità domandata di ciascun bene non risente di variazioni della stessa proporzione in tutti i prezzi e nel reddito. Nel raggiungere questo risultato non è stato necessario supporre funzioni di utilità positivamente omogenee.

ESEMPIO

Se proviamo ad utilizzare come funzione di utilità

$$U(x_1, x_2) = x_1^\alpha x_2^\beta \ \ con\ \alpha = \beta = 1/2,$$

possiamo provare in modo esplicito le dipendenze appena discusse.
Si ricavino le utilità marginali

$$MU_{x_1} = \frac{\partial U(x_1, x_2)}{\partial x_1} = \alpha x_1^{1/2-1} x_2^{1/2},$$

$$MU_{x_2} = \frac{\partial U(x_1, x_2)}{\partial x_2} = \beta x_1^{1/2} x_2^{1/2-1}.$$

Nel punto di equilibrio

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{MU_{x_1}}{MU_{x_2}} = \frac{1/2\ x_1^{1/2-1} x_2^{1/2}}{1/2\ x_1^{1/2} x_2^{1/2-1}},$$

semplificando

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{p_1}{p_2},$$

si isolino x_1, x_2 , sostituendole poi nel vincolo di bilancio

$$p_1 x_1 + \frac{p_2 p_1 x_1}{p_2} = B,$$

$$\frac{p_1 p_2 x_2}{p_1} + p_2 x_2 = B,$$

Esplicitando le variabili x_1, x_2 si ottengono le rispettive funzioni ordinarie di domanda

$$x_1 = \frac{B}{2p_1} \qquad x_2 = \frac{B}{2p_2}.$$

Moltiplicando i prezzi ed il reddito per $t > 0$

$$x_1 = \frac{(tB)}{2(tp_1)} \qquad x_2 = \frac{(tB)}{2(tp_2)},$$

si ottiene evidenza dell'omogenità di grado zero in tutti i prezzi e nel reddito delle funzioni di domanda: variazioni della stessa proporzione nei prezzi e nel reddito non modificano le scelte relative alla quantità domandata dei due beni. Osserviamo come non sia necessaria la positiva omogeneità di U per ottenere questo risultato.

Si assuma una funzione di utilità $U(x_1, x_2)$ positivamente omogenea, sfruttando la proprietà 1 e assumendo $\frac{\partial U(x_1,x_2)}{x_1} > 0$ con $i = 1, 2$, ovvero rispettando l'assioma di non sazietà, si osservi che

$$\frac{\partial U(tx_1, tx_2)/\partial x_1}{\partial U(tx_1, tx_2)/\partial x_2} = \frac{t^{k-1} \partial U(x_1, x_2)/\partial x_1}{t^{k-1} \partial U(x_1, x_2)/\partial x_2} = \frac{\partial U(x_1, x_2)/\partial x_1}{\partial U(x_1, x_2)/\partial x_2},$$

ovverosia il saggio marginale di sostituzione (rapporto tra le utilità marginali), nonchè l'inclinazione in valore assoluto della curva di indifferenza in (x_1, x_2), non risente di variazioni della stessa proporzione in x_1, x_2. Questa peculiarità permette di affermare come $MRS_{x_1 x_2}$ di $U(x_1, x_2)$ positivamente omogenea sia costante lungo ogni raggio dall'origine. Osserviamo come un aumento del reddito B comporti una mera traslazione parallela del vincolo di bilancio. La soluzione ottima in corrispondenza dell'accresciuto reddito è quindi situata all'intersezione del nuovo vincolo di bilancio ed il raggio dall'origine lungo il quale $MRS_{x_1 x_2} = p_1/p_2$. I panieri di beni scelti in corrispondenza di variazioni nel reddito, ceteris paribus, si situano di conseguenza in un preciso raggio dall'origine (SIMON e BLUME, 1994, pag. 488-490). Ricordando come le curva che collega i diversi panieri di equilibrio in corrispondenza di espansioni o contrazioni nel reddito venga denominata sentiero di espansione del reddito (KATZ *e altri*, 2011, pag. 63-64), segue che, nel caso di funzioni di utilità positivamente omogenee, questo è situato nel raggio dall'origine in cui $MRS_{x_1 x_2} = p_1/p_2$.

ESEMPIO

Consideriamo la funzione di utilità $U(x_1, x_2)$ trattata nell'esempio precedente. Ricordiamo come essa sia positivamente omogenea di grado 1. Le funzioni di domanda sono

$$x_i^* = \frac{B}{2p_i} \;\; con\ i = 1, 2\ .$$

Si assuma il valore di B venga moltiplicato per $t > 0$. Utilizzando il pedice a per indicare la situazione iniziale, mentre f rappresenti un qualsiasi momento successivo, allora

$$tB_a = B_f,$$

quindi

$$x_f = \frac{B_f}{2p_i} \rightarrow x_f = \frac{B_a t}{2p_i} \rightarrow x_a t = \frac{B_a t}{2p_i},$$

si osserva come la variazione proporzionale in B_a faccia variare nella stessa proporzione x_a.

In altri termini

$$x_i(tB) = t^1 x_i(B) \;\; con \; i = 1, 2 \; ,$$

ovvero le funzioni di domanda ricavate da un consumatore con $U(x_1, x_2)$ positivamente omogenea sono a loro volta omogenee di grado 1 nel reddito: raddopiando il reddito duplica di conseguenza il consumo di ciascun bene (SIMON e BLUME, 1994, pag. 488-490). La proporzionalità diretta tra reddito e x_1^*, x_2^* ci conferma infine come, nel caso di una funzione di utilità positivamente omogenea, il sentiero di espansione del reddito abbia andamento lineare (collocandosi nel raggio dall'origine dove $MRS_{x_1 x_2} = p_1/p_2$).

Si è dedotto come le funzioni di domanda ordinarie di un consumatore con funzione di utilità positivamente omogenea abbiano andamento lineare rispetto al reddito, il che equivale ad affermare la loro omogeneità di grado 1 nel reddito. Si consideri l'elasticità della domanda al reddito

$$\frac{\partial x_i}{\partial B} \frac{B}{x_i} \;\; con \; i = 1, 2 \; .$$

Considerando

$$x_i^* = x_i(B) = sB \;\; con \; i = 1, 2 \; ,$$

dove s corrisponde ad una costante indicatrice della pendenza delle curve di domanda, la sua elasticita al reddito è pari a

$$\frac{\partial(sB)}{\partial B} \frac{B}{sB} = s \frac{B}{sB} = 1 \; ,$$

ossia l'elasticità della domanda al reddito, per un consumatore con funzione di utilità positivamente omogenea, è pari a 1 (KATZ *e altri*, 2011, pag. 78-81).

ESEMPIO

Utilizziamo nuovamente le funzioni di domande relative a $U(x_1, x_2) = x_1^{(1/2)} x_2^{(1/2)}$

$$x_1 = \frac{B}{2p_1} \qquad x_2 = \frac{B}{2p_2} \quad ,$$

si ricavi l'elasticità della domanda al reddito per ciascun bene

$$\frac{\partial(B/2p_1)}{\partial B} \frac{B}{(B/2p_1)} = \frac{1}{2p_1} \frac{B}{B/2p_1} = \frac{x_1}{x_1} = 1,$$

$$\frac{\partial(B/2p_2)}{\partial B} \frac{B}{(B/2p_2)} = \frac{1}{2p_2} \frac{B}{B/2p_2} = \frac{x_2}{x_2} = 1,$$

confermando le aspettative di un'elasticità al reddito unitaria. Risulta pertanto come una funzione di utilità positivamente omogenea caratterizzi beni normali: accrescere del 10% il reddito conduce ad un aumento del 10% nella quantità richiesta di ciascun bene.

Poniamo particolare attenzione che l'omogeneità di grado 1 nel reddito delle funzioni ordinarie di domanda, con le relative conseguenze in termini di sentiero di espansione ed elasticità, richieda sì una funzione di utilità positivamente omogenea di grado k, ma senza pretese sul valore di k.

III. Funzioni positivamente omogenee, tecnologie produttive e comportamento dell'impresa

In questo capitolo ci si muoverà in maniera pressochè equivalamente, nel metodo e negli scopi, rispetto alla sezione precedente. La differenza chiave, evidentemente, è nell'agente economico su cui porremo il focus, il quale diverrà l'impresa.

Consideriamo capitale e lavoro gli inputs che l'impresa utilizza per ottenere l'output desiderato. Si assuma inoltre che capitale e lavoro siano variabili, ovvero ci si ponga in una prospettiva di lungo termine. La funzione di produzione $f(K, L)$ fornisce precise indicazioni sull'output ottenibile per ogni dato livello di capitale e lavoro. A determinare la struttura di tale funzione sono le possibilità tecnologiche (KATZ *e altri*, 2011, pag. 218-223). La forma funzionale più spesso utilizzata dagli economisti nella stima di $f(K, L)$ è quella alla Cobb-Douglas (BLAUG, 1985, pag. 449-451). Si è osservato come una funzione alla Cobb-Douglas presenti un grado di omogeneità pari alla somma dei parametri $\alpha + \beta$. Riferendosi alla meno restrittiva classe delle funzioni di produzione positivamente omogenee, esse consentono l'immediato riconoscimento del livello dei rendimenti di scala (SIMON e BLUME, 1994, 485). Variazioni nella scala di produzione, a seconda degli effetti sul livello produttivo, caratterizzano situazioni di (KATZ *e altri*, 2011, pag. 234-237):

1. rendimenti di scala costanti$\rightarrow$ $f(tK, TL) = t^1 f(K, L)$,
2. rendimenti di scala crescenti$\rightarrow$ $f(tK, tL) > t^1 f(K, L)$,
3. rendimenti di scala decrescenti$\rightarrow$ $f(tK, tL) < t^1 f(K, L)$.

Dalla definizione di funzione positivamente omogenea

$$f(tK, tL) = t^k f(K, L),$$

osserviamo come, $\forall t > 1$, il livello dei rendimenti di scala sia strettamente correlato al grado di omogeneità k della funzione di produzione, in particolare:

1. se $k = 1$ si hanno rendimenti di scala costanti,
2. se $k > 1$ si hanno rendimenti di scala crescenti,
3. se $0 < k < 1$ si hanno rendimenti di scala decrescenti.

Qualunque sia la forma di mercato in cui opera l'impresa, il suo obiettivo nel produrre un determinato livello q è quello di operare in condizioni di massima efficienza (JEHLE e RENY, 2011, pag. 135-137). Ricordiamo come ciascun isoquanto rappresenti le combinazioni di capitale e lavoro che permettono di ottenere il medesimo livello di output, mentre ciascun isocosto rappresenti le quantità di capitale e lavoro accomunate dal medesimo costo C, dato il costo unitario del lavoro w e del capitale r. La soluzione al problema di minizzazione del costo, sotto il vincolo $f(K, L) = q$, si ottiene nel punto di tangenza tra isoquanto target ed isocosto, ovvero dove

$$\frac{r}{w} = \frac{MP_K}{MP_L} = MRTS_{KL} \ .$$

Tramite questa minimizzazione vincolata si possono ottenere

$$L^*(r, w, q) \ e \ K^*(r, w, q),$$

ossia le domande condizionate dei fattori (rappresentano la quantità richiesta di ciascun input in ottica di minimizzazione dei costi). Entrambre sono funzioni dei prezzi dei fattori e del livello di q. Assumendo di fissare q, essa smetterà di rappresentare una variabile indipendente all'interno delle domande condizionate dei fattori, allora

$$L^*(r, w) \ \ e \ \ K^*(r, w).$$

Moltiplicando i prezzi di entrambi i fattori per $t > 0$

$$L^*(tr, tw) \ e \ K^*(tr, tw),$$

osserviamo come il prezzo relativo (inclinazione della linea di isocosto) non venga influenzato, così come l'isoquanto target sia il medesimo per ipotesi. Si deduce di conseguenza come la combinazione ottima di inputs non risulti mutata rispetto alla situazione iniziale, vale a dire

$$L^*(r, w) = L^*(tr, tw) = t^0 L^*(r, w),$$
$$K^*(r, w) = K^*(tr, tw) = t^0 K^*(r, w).$$

Perciò concludiamo come le funzioni di domanda condizionata dei fattori siano positivamente omogenee di grado 0 nei prezzi dei rispettivi fattori: raddoppiare i prezzi di entrambi i fattori lascia inalterata la quantità domandata di capitale e lavoro (SYDSAETER *e altri*, 2005, pag. 163).

ESEMPIO

Consideriamo la seguente funzione di produzione

$$f(K, L) = K^\alpha L^\beta \quad con \ \ \alpha = \beta, \alpha > 0, \beta > 0.$$

Ricaviamo le produttività marginali

$$MP_K = \frac{\partial f(K,L)}{\partial K} = \alpha K^{\alpha-1}L^{\beta} \ ,$$

$$MP_L = \frac{\partial f(K,L)}{\partial L} = \beta K^{\alpha}L^{\beta-1} \ .$$

Volendo minimizzazione i costi, nel punto di equilibrio

$$\frac{r}{w} = \frac{MP_K}{MP_L} = \frac{\alpha K^{\alpha-1}L^{\beta}}{\beta K^{\alpha}L^{\beta-1}},$$

semplificando

$$\frac{r}{w} = \frac{L}{K}.$$

Si sostituisca K, L nel vincolo posto in sede di minimizzazione dei costi

$$q = K^{\alpha}(\frac{r}{w}K)^{\beta} = K^{\alpha+\beta}\frac{r^{\beta}}{w^{\beta}},$$

$$q = (L\frac{w}{r})^{\alpha}L^{\beta} = L^{\alpha+\beta}\frac{w^{\alpha}}{r^{\alpha}},$$

esplicitando gli inputs K, L si ottengono le funzioni di domanda condizionata dei fattori

$$K^* = q^{\frac{1}{\alpha+\beta}}\frac{r^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}}{w^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}},$$

$$L^* = q^{\frac{1}{\alpha+\beta}}\frac{w^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}}{r^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}},$$

moltiplicando il prezzo di entrambi i fattori per $t > 0$

$$K^* = q^{\frac{1}{\alpha+\beta}}\frac{(tw)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}}{(tr)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}} = q^{\frac{1}{\alpha+\beta}}\frac{t^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}w^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}}{t^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}r^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}} = q^{\frac{1}{\alpha+\beta}}\frac{w^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}}{r^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}},$$

$$L^* = q^{\frac{1}{\alpha+\beta}}\frac{(tr)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}}{(tw)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}} = q^{\frac{1}{\alpha+\beta}}\frac{t^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}r^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}}{t^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}w^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}} = q^{\frac{1}{\alpha+\beta}}\frac{r^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}}{w^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}},$$

si ottiene evidenza dell'omogeneità di grado 0 nei prezzi degli inputs della funzione di domanda condizionata di ogni fattore: variazioni della stessa proporzione nei prezzi degli inputs non modificano la quantità domandata di ciascun fattore produttivo.

Abbinando le funzioni di domanda condizionata ed il costo unitario di ciascun fattore è possibile costruire la struttura della funzione di costo

$$C(r,w,q) = rK^*(w,r,q) + wL^*(w,r,q).$$

Si ponga il livello target di q costante, in modo che il costo sia funzione solamente delle variabili r, w

$$C(r,w) = rK^*(w,r) + wL^*(w,r),$$

moltiplichiamo il prezzo di ciascun fattore per $t > 0$

$$C(tr,tw) = (tr)K^*(tw,tr) + (tw)L^*(tw,tr),$$

sfruttando l'omogeneità di grado 0, in tutti i prezzi, delle funzioni di domanda condizionata

$$\begin{aligned} C(tr,tw) &= (tr)K^*(w,r) + (tw)L^*(w,r) \\ &= t[rK^*(w,r) + wL^*(w,r)] \\ &= t^1 C(r,w), \end{aligned}$$

si deduce come la funzione di costo sia positivamente omogenea di grado 1 nei prezzi degli inputs (JEHLE e RENY, 2011, pag. 138): raddoppiare o triplicare i loro prezzi conduce ad un volume di costo rispettivamente doppio o triplo per mantenere il medesimo livello produttivo q.

ESEMPIO

Facciamo riferimento alle funzioni di domanda condizionata ottenute nell'esempio antecedente

$$K^* = q^{\frac{1}{\alpha+\beta}}\frac{r^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}}{w^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}},$$

$$L^* = q^{\frac{1}{\alpha+\beta}}\frac{w^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}}{r^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}}.$$

Costruiamo la relativa funzione di costo

$$C(r,w,q) = r\ q^{\frac{1}{\alpha+\beta}}\frac{w^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}}{r^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}} + w\ q^{\frac{1}{\alpha+\beta}}\frac{r^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}}{w^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}} \ .$$

Si ponga il livello obiettivo di q pari a 1 e si raddoppi il costo unitario dei fattori

$$C(2r,2w) = (2r)\frac{(2w)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}}{(2r)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}} + (2w)\frac{(2r)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}}{(2w)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}} \quad ,$$

semplificando, grazie all'omogeneità di grado 0 delle funzioni di domanda condizionata rispetto ai prezzi dei fattori

$$\begin{aligned} C(2r,2w) &= (2r)\frac{w^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}}{r^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}} + (2w)\frac{r^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}}{w^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}} \\ &= 2[r\frac{w^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}}{r^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}} + w\frac{r^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}}{w^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}}] \\ &= 2[C(r,w)], \end{aligned}$$

possiamo confermare in termini pratici l'omogeneità di grado 1 della funzione di costo in entrambi i prezzi dei fattori produttivi.
I passaggi realizzati in questo esempio permettono di osservare un'altra importante proprietà: la funzione di costo, relativa ad un'impresa con $f(K,L)$ positivamente omogenea di grado k nelle variabili capitale e lavoro, è omogenea di grado $1/k$ nel livello di produzione q (SIMON e BLUME, 1994, pag. 490-491). Nel particolare caso analizzato si osserva come $f(K,L)$ sia positivamente omogenea di grado $\alpha+\beta$ in K, L , mentre la rispettiva funzione di costo è positivamente omogenea di grado $\frac{1}{\alpha+\beta}$ in q.

É opportuno enfatizzare come l'omogeneità di grado 0 di L^* e K^*(nei rispettivi prezzi unitari) e l'omogeneità di grado 1 della funzione di costo (nei prezzi unitari di capitale e lavoro) non necessitino assunzioni di omogeneità nella funzione di produzione.

Consideriamo una funzione di produzione $f(K,L)$ positivamente omogenea, richiedendo che la produttività marginale di ciascun fattore sia positiva ($\partial f(K,L)/\partial K > 0$ e $\partial f(K,L)/\partial L > 0$), possiamo ricavare conclusioni analiticamente simili a quelle ottenute in II: il saggio marginale di sostituzione tecnica, nonchè l'inclinazione in valore assoluto dell'isoquanto in (K,L), non risente di variazioni della stessa proporzione in K, L. $MRTS_{KL}$ è quindi costante lungo ogni raggio dall'origine (SIMON e BLUME, 1994, pag. 488-491).
Si consideri pertanto un'impresa con funzione di produzione positivamente omogenea, la quale possieda produttività marginali positive, voglia aumentare q, ceteris paribus. La diversa combinazione di capitale e lavoro scelta si situa nell'intersezione tra il nuovo isoquanto ed il raggio dall'origine dove $MRTS_{KL} = r/w$. Si ricordi come, dati i prezzi dei fattori e la tecnologia produttiva, le combinazioni di inputs di minimo costo corrispondenti a diversi volumi di produzione vengano collezionate nel sentiero di espansione (KATZ *e altri*, 2011, pag. 264-266). Quindi, parallelamente a quanto dedotto rispetto alla teoria del consumatore, il sentiero di espansione della suddetta impresa è situato nel raggio dall'origine in cui $MRTS_{KL} = r/w$.

Nell'esplicare in quale maniera il Teorema di Eulero metta in relazione livello dei profitti e grado di omogeneità, ipotizziamo che il mercato, del prodotto e dei fattori, sia perfettamente concorrenziale, ovvero rispetti quattro distinte ipotesi, riepilogate in KATZ *e altri* (2011)(pag. 303-311):

- I venditori non possono influire sul prezzo di mercato,
- I venditori non adottano comportamenti strategici,
- Nel mercato vi è libertà d'entrata,
- I compratori non fanno il prezzo.

In un mercato perfettamente concorrenziale l'azienda agisce come price taker, in quanto scegliere di vendere il proprio prodotto sopra o sotto il prezzo di mercato sarebbe sconveniente. Allo stesso modo acquistare i

fattori sopra o sotto il prezzo prevalente appare irragionevole.
Queste ipotesi sono restrittive, ma ci permettono di ottenere con più facilità le intuizioni che stiamo cercando.
Sia la funzione di produzione $q = f(K, L)$ positivamente omogenea di grado α, tramite la proprietà 2 (Teorema di Eulero)

$$K\frac{\partial f(K,L)}{\partial K} + L\frac{\partial f(K,L)}{\partial L} = \alpha f(K,L) = \alpha q,$$

si apprende che, sommando il prodotto tra quantità utilizzata e prodotto marginale di ciascun input, otteniamo il volume produttivo moltiplicato per il grado di omogeneità (SIMON e BLUME, 1994, pag. 492).
Un'impresa operante in concorrenza perfetta massimizza il suo profitto

$$\pi = pf(K,L) - rK - wL,$$

quando vengono rispettate le seguenti condizioni

$$p\frac{\partial f(K,L)}{\partial K} = r \;\; e \;\; p\frac{\partial f(K,L)}{\partial L} = w,$$

vale a dire nel punto (K, L) in cui il valore del prodotto marginale di ciascun fattore eguaglia il suo rispettivo costo unitario (JEHLE e RENY, 2011, pag. 145-147). Di conseguenza il costo totale nel punto di ottimo

$$\begin{aligned} C &= Kp\frac{\partial f(K,L)}{\partial K} + Lp\frac{f(K,L)}{\partial L} \\ &= p[K\frac{\partial f(K,L)}{\partial K} + L\frac{f(K,L)}{\partial L}]. \end{aligned}$$

Sfruttando il Teorema di Eulero possiamo riscrivere il costo totale come

$$C = p\alpha q.$$

Ricordiamo la classica configurazione dei ricavi dell'impresa

$$R = pq.$$

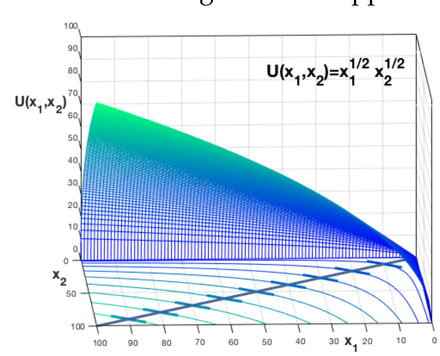
Dall'applicazione del Teorema di Eulero in ambito produttivo segue che:

1. se $\alpha = 1$ i ricavi vengono esauriti nel ripagare tutti i fattori produttivi di cui si è fatto uso. Tale situazione è definita di "Product Exhaustion"(LEE, 2010),
2. se $\alpha > 1$ i costi sostenuti per i fattori capitale e lavoro eccedono l'ammontare dei ricavi, maturando un profitto negativo,
3. se $0 < \alpha < 1$ il volume dei costi è inferiore al valore dell'output, il che permette di realizzare un profitto positivo.

IV. Simulazioni numeriche

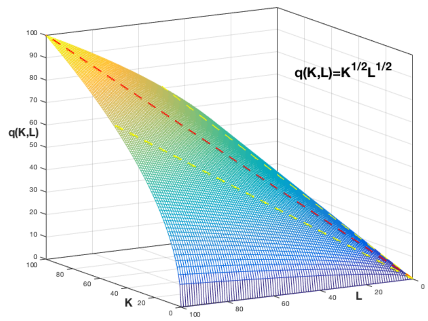
Con le seguenti simulazioni numeriche si mira a rendere immediatamente comprensibili, nel caso di funzioni positivamente omogenee, talune relazioni tra variabili che fino ad ora si sono trattate in modo meramente descrittivo. Specificamente si forniscono quattro elaborazioni grafiche: la prima tratta l'andamento del *MRS* lungo un raggio dall'origine, mentre le restanti tre sono strettamente correlate alle dinamiche produttive, in particolare ai rendimenti di scala. I listati MATLAB utilizzati per ottenere questi grafici sono presentati nell'allegato A.

La *fig.IV.1* rende evidente come il *MRS* di una funzione di utilità positivamente omogenea sia lo stesso lungo uno specifico raggio dall'origine. Per quanto concerne la validità di tale proprietà lungo ogni raggio dall'origine si rimanda ai dettagli analitici approfonditi in II.



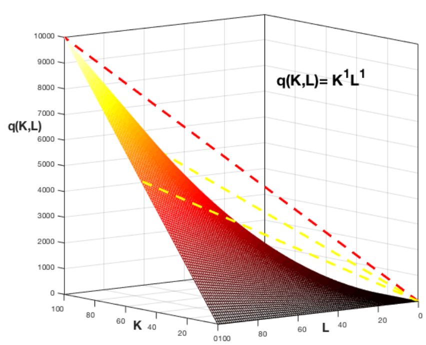
[*fig.IV.1*]

La *fig.IV.2* chiarisce in quale modo una funzione di produzione con rendimenti di scala costanti (grado di omogeneità pari a 1) faccia seguire ad un aumento proporzionale negli inputs, un aumento di eguale proporzione nell'output.



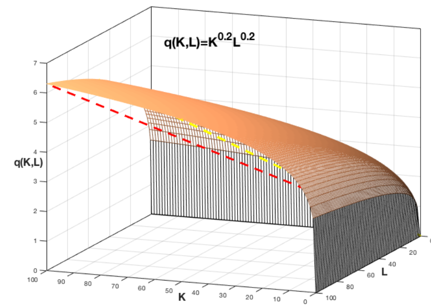
[*fig.IV.2*]

Nella *fig.IV.3* osserviamo il comportamento di una funzione di produzione con rendimenti di scala crescenti (grado di omogeneità superiore a 1). Qualsiasi combinazione iniziale (K, L) venga scelta come riferimento, un aumento proporzionale negli inputs si riflette in un livello produttivo accresciuto in maniera più che proporzionale.



[*fig.IV.3*]

In opposizione alla *fig.IV.3*, nella *fig.IV.4* si rappresenta una funzione di produzione con rendimenti di scala decrescenti (grado di omogeneità inferiore a 1). É dunque logico aspettarsi, oltre che semplicemente constatabile, come un aumento proporzionale negli inputs conduca ad un livello produttivo sì accresciuto, ma in modo meno che proporzionale.



[*fig.IV.4*]

V. Conclusioni

In questo elaborato abbiamo introdotto con dettaglio matematico le funzioni positivamente omogenee, occupandoci poi di analizzare in quale modo e sotto quali condizioni esse influenzino il comportamento dei due agenti economici che fungono da cardine nella teoria microeconomica: il consumatore e l'impresa. É stato dunque messo in evidenza come dalla comprensione e manipolazione di strumenti ed espressioni matematiche, nel nostro caso principalmente funzioni positivamente omogenee di grado 0 e 1, si raggiunga una migliorata comprensione delle tecniche utilizzate per la risoluzione di problemi microeconomici. Le applicazioni microeconomiche delle funzioni positivamente omogenee sono sicuramente più vaste di quello che in questa prova finale si è illustrato: nella scelta di quali proporre si è data priorità a nozioni in qualche modo elementari, ma sulle quali si possedesse un certo grado di dimestichezza grazie ai precedenti corsi. Oltre ai contenuti esposti, si è avuto modo di apprendere l'utilizzo del software LaTeX e ad un livello più limitato del software MATLAB. Per il primo ci si è appoggiati alla guida di GARBELLINI (2010), mentre per il secondo ci si è serviti del manuale introduttivo a cura di PALM (2007). Nella stesura di questo elaborato si sono incotrate alcune difficoltà nel gestire, soprattutto in fase di derivazione, funzioni composte in più variabili, per le quali si è impiegato "Calculus Multivariable" di LARSON e EDWARDS (2009).

A. Listati MATLAB

Listing 1: fig.IV.1

```
t1a= [0.5,1,1.5] * 10;
t1b= [1.5,1,0.5] * 10;
t2a= [1.5,2,2.5] * 10;
t2b= [2.5,2,1.5] * 10;
t3a= [2.5,3,3.5] * 10;
t3b= [3.5,3,2.5] * 10;
t4a= [3.5,4,4.5] * 10;
t4b= [4.5,4,3.5] * 10;
t5a= [4.5,5,5.5] * 10;
t5b= [5.5,5,4.5] * 10;
t6a= [5.5,6,6.5] * 10;
t6b= [6.5,6,5.5] * 10;
t7a= [6.5,7,7.5] * 10;
t7b= [7.5,7,6.5] * 10;
t8a= [7.5,8,8.5] * 10;
t8b= [8.5,8,7.5] * 10;
t9a= [8.5,9,9.5] * 10;
t9b= [9.5,9,8.5] * 10;
r1a= (0:1:100);
r1b= (0:1:100);

[x1,x2] = meshgrid (0:1:100 , 0:1:100);
z = x1.^0.5 .* x2.^0.5;
meshc(x1,x2,z)
hold 'on'

plot(t1a,t1b)
plot(t2a,t2b)
plot(t3a,t3b)
plot(t4a,t4b)
plot(t5a,t5b)
plot(t6a,t6b)
plot(t7a,t7b)
plot(t8a,t8b)
plot(t9a,t9b)
plot(r1a,r1b)
```

Listing 2: fig.IV.2

```
x1r = (0:100);
x2r = (0:100);
zr = (0:100);
x1rb = [0,100];
x2rb = [0, 50];
zrb = [0, 70.71];
x1rc = [0, 50];
x2rc = [0, 100];
zrc = [0, 70.71];

[x1,x2]= meshgrid(0:100,0:100);
z = x1.^0.5 .* x2.^0.5;
mesh(x1,x2,z)
hold 'on'

plot3(x1r,x2r,zr)
plot3(x1rb,x2rb,zrb)
plot3(x1rc,x2rc,zrc)
```

Listing 3: fig.IV.3

```
x1r = [0,100];
x2r = [0,100];
zr = [0, 10000];
x1rb = [0,100];
x2rb = [0, 50];
zrb = [0, 5000];
x1rc = [0, 50];
x2rc = [0, 100];
zrc = [0, 5000];

[x1,x2]= meshgrid(0:100,0:100);
z = x1.^1 .* x2.^1;
mesh(x1,x2,z)
hold 'on'

plot3(x1r,x2r,zr)
plot3(x1rb,x2rb,zrb)
plot3(x1rc,x2rc,zrc)
```

Listing 4: fig.IV.4

```
x1r = [0,100];
x2r = [0,100];
zr = [0, 6.3096];
x1rb = [0,100];
x2rb = [0, 50];
zrb = [0, 5.4928];
x1rc = [0, 50];
x2rc = [0, 100];
zrc = [0, 5.4928];

[x1,x2]= meshgrid(0:100,0:100);
z = x1.^0.2 .* x2.^0.2;
mesh(x1,x2,z)
hold 'on'

plot3(x1r,x2r,zr)
plot3(x1rb,x2rb,zrb)
plot3(x1rc,x2rc,zrc)
```

Riferimenti bibliografici

BLAUG M. (1985). *Economic Theory Retrospect*. 4°ed. Cambridge: Cambridge University Press.

BURATTO A.; GRASSELLI M.; GROSSET L.; VISCOLANI B. (2014). *MATEMATICA GENERALE*. Padova: Edizioni Libreria Progetto.

GARBELLINI N. (2010). *LATEXfacile - Guida all'uso*. 2°ed. s.l. : s.n.

JEHLE G.; RENY P. (2011). *Advanced Microeconomic Theory*. 3°ed. Harlow: Pearson.

KATZ M.; ROSEN H.; BOLLINO C.; MORGAN W. (2011). *Microeconomia*. 4°ed. Milano: McGraw-Hill Companies.

LARSON R.; EDWARDS B. (2009). *Calculus Multivariable*. 9°ed. Belmont: Brooks/Cole, Cengage Learning.

LEE C. (2010). The product exhaustion theorem. In *Famous Figures and Diagrams in Economics*, capitolo 9. Cheltenham: Edward Elgar Publishing.

PALM W. (2007). *A Concise Introduction to Matlab*. New York: McGraw-Hill.

SIMON C.; BLUME L. (1994). *Mathematics for Economists*. 1°ed. Londra: W.W. Norton & Company.

SYDSAETER K.; STRØM A.; BERCK P. (2005). *Economists' Mathematical Manual*. 4°ed. Berlino: Springer.

VALI S. (2014). *Principles of Mathematical Economics*. Parigi: Atlantis Press.